

Вариант 0.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -1; 0)$ ,  $\mathbf{b}(1; 3; -3)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; -4; 9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(1; -3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(11; 19; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -5; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 9; 8)$ ,  $B(9; 10; 7)$ ,  $C(-2; 7; 11)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(-1; 7; -8)$ ,  $Q(-4; 8; -16)$ ,  $R(7; 4; 1)$ ,  $S(-4; 8; 2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-2; 6; -8)$ ,  $B(2; 7; -8)$ ,  $C(1; 7; -7)$ , и найти расстояние от точки  $S(5; 3; 2)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(10; 2; 6)$  параллельно прямой  $\frac{x+6}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-2}$  и перпендикулярно плоскости  $-x + 3y - 3z - 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 7; 6)$ ,  $B(-1; 2; -1)$ ,  $C(2; 9; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -9x + 7y + 3z + 19 = 0 \\ -2x + 2y + z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-35; 16; 31)$  на плоскость  $-10x + 5y + 7z + 49 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y - 2z = 14$ .

**Вариант 1.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 2; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(1; 6; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(0; 10; -7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 4; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 6; 7)$ ,  $\mathbf{c}(2; -3; -10)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 4; 7)$ ,  $B(-4; 3; 4)$ ,  $C(-3; 3; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(-5; 4; -5)$ ,  $Q(-6; 5; -3)$ ,  $R(-7; 6; -4)$ ,  $S(-2; 2; -4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-5; -10; 8)$ ,  $B(-2; -5; 15)$ ,  $C(-7; -13; 5)$ ,  $S(1; -3; 6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-3; -2; -6)$  параллельно прямой  $\frac{x-4}{-9} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+3}{-1}$  и  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 2; 4)$ ,  $B(4; 4; 5)$ ,  $C(16; -1; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} -x - y + z + 4 = 0 \\ -2x - 3y - z - 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-21; -11; 40)$  на плоскость  $5x + 4y - 9z = -21$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+7}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-8}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 7x - y + 3z = 13$ .

**Вариант 2.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 1; -3)$ ,  $\mathbf{b}(0; -1; -4)$ ,  $\mathbf{c}(2; 3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 2; 7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 6)$ ,  $\mathbf{c}(2; -11; 12)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 0; 8)$ ,  $B(10; 2; 9)$ ,  $C(-4; -3; 7)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(9; 3; 0)$ ,  $B(18; -1; 7)$ ,  $D(11; 0; 2)$ ,  $A_1(7; 1; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; -1; 4)$ ,  $B(8; 0; 6)$ ,  $C(10; -3; 1)$ ,  $S(2; -1; -4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-6; 3; 7)$  перпендикулярно плоскостям  $2x + y - z = 7$  и  $-x + 2y + z = 1$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 2; 2)$ ,  $B(0; 0; -3)$ ,  $C(11; 3; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - 2y + z + 1 = 0 \\ -3x - 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-11; 19; -7)$  относительно плоскости  $-5x + 8y - 3z = -17$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 2y - z = -2$ .

**Вариант 3.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; -3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(5; -3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 4; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; 2; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(1; -4; 2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-6; 17; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 9; 3)$ ,  $B(15; 8; 2)$ ,  $C(13; 8; 1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(-2; 0; 1)$ ,  $A_2(-10; 3; 5)$ ,  $A_3(7; -2; -2)$ ,  $A_4(-4; -1; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(5; 1; 1)$ ,  $B(0; -1; 0)$ ,  $C(3; 0; 1)$ ,  $S(3; 1; -7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(2; 10; 6)$  параллельно прямым  $\frac{x}{8} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{-4}$  и  $\frac{x+8}{-7} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 9; 2)$ ,  $B(-2; 1; 3)$ ,  $C(6; 10; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -5x + 4y + 3z + 17 = 0 \\ -6x + 5y + 4z + 20 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(5; 6; -2)$  относительно плоскости  $-5x - 9y = -26$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-3}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y - 3z - 5 = 0$ .

**Вариант 4.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 3; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 2; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 5; -10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 6; -2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -5; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 1; 7)$ ,  $B(9; -5; 8)$ ,  $C(8; 0; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(5; 0; 9)$ ,  $A_2(2; 4; 11)$ ,  $A_4(3; -1; 10)$ ,  $B_1(3; 4; 10)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-2; -2; 9)$ ,  $B(-5; -1; 7)$ ,  $C(-3; 0; 6)$ ,  $S(2; -8; 6)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; -10; -6)$  параллельно прямой  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-6}$  и перпендикулярно плоскости  $3x - 2y + 7z + 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 9; 5)$ ,  $B(-6; 10; 11)$ ,  $C(9; 8; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -8x + y + z - 17 = 0 \\ -9x + y + 2z - 21 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(0; 1; 9)$  относительно плоскости  $-6x - 7y - 9z = -5$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+7}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -x + y + z = -7$ .

Вариант 5.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(5; 1; 0)$ ,  $\mathbf{c}(3; -3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -4; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; -8; 2)$ ,  $\mathbf{b}(5; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 2; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 1; 0)$ ,  $B(8; 10; -2)$ ,  $C(8; 2; -1)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-3; 5; -2)$ ,  $B(-7; 7; 1)$ ,  $D(-6; 6; 0)$ ,  $E(-11; 8; 4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; 8; -2)$ ,  $B(6; 6; -11)$ ,  $C(9; 11; 8)$ ,  $S(6; 8; 4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(5; 3; 8)$  параллельно прямой  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{0}$  и перпендикулярно плоскости  $-x - 4y + z = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 8; 3)$ ,  $B(-4; 10; -6)$ ,  $C(-1; 9; -2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + y + 12 = 0 \\ 3x - y + z - 29 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(9; -4; -4)$  относительно плоскости  $4x - 5y - 5z = -23$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-5}$  и плоскостью  $\pi : -x + y - z + 4 = 0$ .

Вариант 6.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 0; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -3; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(0; -4; 6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-3; -13; -5)$ ,  $\mathbf{b}(1; 3; 1)$ ,  $\mathbf{c}(3; 6; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 3; 6)$ ,  $B(-5; 4; 8)$ ,  $C(-4; 4; 9)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-4; -2; -1)$ ,  $A_2(-6; -5; 2)$ ,  $A_4(-5; 1; -2)$ ,  $B_1(-9; -9; 6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(8; -1; 4)$ ,  $B(9; 1; 10)$ ,  $C(7; -2; 3)$ , и найти расстояние от точки  $S(-5; -1; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-2; -10; 9)$  параллельно плоскости  $x - y - z = -4$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+8}{1} = \frac{z-3}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 8; 5)$ ,  $B(9; 7; 7)$ ,  $C(6; 11; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - 2y + z + 5 = 0 \\ -4x - 3y + z - 17 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(7; -4; 23)$  на плоскость  $-6x + 7y - 9z - 55 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+7}{-2}$  и плоскостью  $\pi : x - y + z = -6$ .

Вариант 7.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 1; -4)$ ,  $\mathbf{b}(1; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(0; -2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; -8; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(2; 0; -5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 9; 5)$ ,  $B(3; 10; 6)$ ,  $C(7; 6; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(3; -4; -3)$ ,  $A_2(5; -5; -10)$ ,  $A_4(2; -6; -3)$ ,  $B_1(5; -6; -12)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; -5; -1)$ ,  $B(-2; -9; -1)$ ,  $C(-4; -6; 0)$ ,  $S(1; -7; 3)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(5; -2; 10)$  параллельно прямой  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+7}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $x + 3y + z + 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 7; 7)$ ,  $B(6; 4; 3)$ ,  $C(13; 14; 16)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 7x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(20; 40; 8)$  на плоскость  $7x + 8y + 3z = -4$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x + 7y - z + 13 = 0$ .



**Вариант 8.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $3 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -6; 5)$ ,  $\mathbf{b}(1; -2; 2)$ ,  $\mathbf{c}(0; -1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; 2; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(1; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(1; 4; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; -11; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 4; 1)$ ,  $B(2; 7; 0)$ ,  $C(5; -4; 2)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $R$ .  $P(-1; 7; 1)$ ,  $Q(7; 10; -4)$ ,  $R(0; 2; -1)$ ,  $S(2; 9; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-4; 3; -1)$ ,  $B(-2; 7; 2)$ ,  $C(-5; 4; -2)$ ,  $S(4; 0; 7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(3; 3; 2)$  перпендикулярно плоскостям  $x - 4y + 2 = 0$  и  $-2x + 3y + z = 6$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 8; 6)$ ,  $B(6; 9; 6)$ ,  $C(4; 10; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + y - 28 = 0 \\ 2x - y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-9; -2; 2)$  относительно плоскости  $3x + 2y - z + 12 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{2}$  и плоскостью  $\pi : -x - 5y + z = 15$ .

**Вариант 9.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 4; 2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 3; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; -9; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(7; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(9; -6; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 4; 6)$ ,  $B(5; 2; 5)$ ,  $C(-3; 5; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-3; -7; -1)$ ,  $B(-7; -4; -8)$ ,  $D(-2; -8; 2)$ ,  $E(-3; -6; -4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-8; -5; 7)$ ,  $B(-7; -3; 8)$ ,  $C(-9; -6; 3)$ , и найти расстояние от точки  $S(7; 3; -7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-9; -7; 10)$  параллельно прямой  $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-2}$  и перпендикулярно плоскости  $8x - 4y + 3z = -3$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 9; 5)$ ,  $B(6; 10; 8)$ ,  $C(4; 11; 12)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -4x + 2y + z - 11 = 0 \\ -7x + y + z - 29 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-19; -27; -24)$  относительно плоскости  $7x + 9y + 8z + 83 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-7}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -x - y - z - 15 = 0$ .

**Вариант 10.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(6; -2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 1; -4)$ ,  $\mathbf{c}(3; -1; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; 1; 6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 9\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-3; 2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(8; -9; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 5; 2)$ ,  $B(8; 4; 0)$ ,  $C(9; 4; 1)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_2$ .  $A_1(4; 7; 0)$ ,  $A_2(-3; 8; -3)$ ,  $A_3(-3; 7; 1)$ ,  $A_4(12; 4; 10)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(8; -7; 8)$ ,  $B(4; -10; 10)$ ,  $C(5; -9; 9)$ ,  $S(-1; 3; 4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; 3; -1)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - 3y + 5z - 8 = 0$  и  $x - y + z = 1$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 7; 6)$ ,  $B(2; 6; 7)$ ,  $C(6; 9; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x + y + 2z - 21 = 0 \\ 2x - y - z - 27 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(30; 40; -26)$  на плоскость  $-8x - 8y + 5z + 78 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+7}{-2} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{3}$  и плоскостью  $\pi : -x + y + 2z = -12$ .

**Вариант 11.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(0; 2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(1; 6; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(7; -2; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 9\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(3; -5; -5)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; 8)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 6; 1)$ ,  $B(-2; 8; 2)$ ,  $C(-6; 11; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(7; 9; -8)$ ,  $A_2(11; 2; -3)$ ,  $A_4(10; 6; -3)$ ,  $B_1(9; 6; -5)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(8; -3; 1)$ ,  $B(7; -10; -2)$ ,  $C(7; -13; -3)$ ,  $S(-5; 6; -7)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 9; -4)$  параллельно прямым  $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+4}{2}$  и  $\frac{x-6}{-5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 9; 2)$ ,  $B(10; 10; 5)$ ,  $C(1; 8; -2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x - 3y - z + 26 = 0 \\ x - 4y + 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(6; 3; -3)$  на плоскость  $7x + 5y - 5z = -126$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{-2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+7}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 3y - z = -14$ .

**Вариант 12.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -4; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; 5; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-3; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(12; -10; -13)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 0; 8)$ ,  $B(6; -3; 9)$ ,  $C(6; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-2; 0; 0)$ ,  $B(-5; -2; 2)$ ,  $D(-7; -3; 3)$ ,  $E(7; 9; -7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-9; 5; -9)$ ,  $B(-10; -2; -12)$ ,  $C(-8; 8; -7)$ ,  $S(-4; 3; -5)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; -4; 3)$  параллельно прямым  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-9} = \frac{z-2}{-1}$  и  $\frac{x+8}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 0; 2)$ ,  $B(2; 7; -1)$ ,  $C(7; -2; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -2x - y + z - 13 = 0 \\ -5x - y - 27 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(19; -19; 13)$  на плоскость  $-9x + 3y - 7z = 98$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+4}{-3}$  и плоскостью  $\pi : -2x - y + z = 10$ .

**Вариант 13.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $D_1 C_1$  в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; -2; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 0; -3)$ ,  $\mathbf{c}(2; 1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; -1; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-15; -9; -8)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(5; 2; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 1; 0)$ ,  $B(6; 3; -1)$ ,  $C(7; 6; 1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(5; -3; -9)$ ,  $B(1; -6; 1)$ ,  $D(6; -3; -14)$ ,  $E(3; -4; -3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; -5; -2)$ ,  $B(10; -1; -6)$ ,  $C(8; -8; 3)$ ,  $S(-1; 5; -1)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; 9; 7)$  параллельно плоскости  $-x + 4y - 2z - 5 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+6}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 3; 2)$ ,  $B(7; -1; 9)$ ,  $C(7; -2; 11)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  

$$\begin{cases} -2x - 3y + z + 29 = 0 \\ x + 2y - z - 18 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-29; 20; -22)$  на плоскость  $10x - 9y + 10z - 153 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-3}{3} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-6}{1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + y + 2z = 0$ .

**Вариант 14.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; -6; 7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_y \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(1; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 4; -3)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 6; 9)$ ,  $B(-5; 5; 9)$ ,  $C(4; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(3; 0; -5)$ ,  $B(1; -1; -3)$ ,  $D(4; -2; -4)$ ,  $A_1(3; 3; -7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-4; -6; -4)$ ,  $B(-11; -4; -1)$ ,  $C(-7; -5; -2)$ ,  $S(-6; 1; 3)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; -2; 1)$  параллельно плоскости  $x + y = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z+6}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 0; 1)$ ,  $B(6; 1; 2)$ ,  $C(7; 2; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 26 = 0 \\ -x + 2y + z - 19 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(2; 30; -3)$  на плоскость  $-x - 7y + 3z = 15$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 2y + 4z = 5$ .

**Вариант 15.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -4; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 1)$ ,  $\mathbf{c}(2; 2; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 1; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 5\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-3; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(6; -2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 1; 0)$ ,  $B(6; 0; 1)$ ,  $C(13; 7; -3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(7; -1; -1)$ ,  $A_2(8; -3; 0)$ ,  $A_4(8; -4; 1)$ ,  $B_1(4; 3; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(0; -2; 8)$ ,  $B(-9; -1; 8)$ ,  $C(-4; -1; 9)$ ,  $S(8; -2; -6)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 3; 1)$  параллельно прямой  $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{-1}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x + 7y + 3z + 4 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 3; 2)$ ,  $B(10; -6; -5)$ ,  $C(7; 8; 6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ -3x - 2y + 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(6; 10; -1)$  на плоскость  $-3x - y - 2z - 30 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-7}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - y + z - 2 = 0$ .



**Вариант 16.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(5; 3; 3)$ ,  $\mathbf{c}(0; 2; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; 7; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(6; -1; -6)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 7; 10)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 5; 2)$ ,  $B(1; -4; 3)$ ,  $C(1; 6; 2)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQR$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $S$ .  $P(2; 0; 9)$ ,  $Q(3; 3; 10)$ ,  $R(-1; -10; 7)$ ,  $S(0; 9; 10)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3; -3; 5)$ ,  $B(-4; 0; 5)$ ,  $C(-2; 4; 4)$ , и найти расстояние от точки  $S(-1; 3; 1)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; -1; -6)$  параллельно прямой  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-2}$  и  $\frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+3}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 8; 1)$ ,  $B(7; 11; -6)$ ,  $C(4; 9; -1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 7 = 0 \\ -x - 5y + z + 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(7; 10; -11)$  на плоскость  $-2x - 4y + 3z - 29 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 5x - 4y + 4z = -4$ .

**Вариант 17.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; 5; 6)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 4; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; 1; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -3; 1)$ ,  $\mathbf{b}(4; -2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 5; 3)$ ,  $B(9; 6; 4)$ ,  $C(6; -2; 2)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_2$ .  $A_1(7; 5; -4)$ ,  $A_2(3; 4; -2)$ ,  $A_3(17; -3; -3)$ ,  $A_4(8; 1; -2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(4; 3; -10)$ ,  $B(3; 4; -9)$ ,  $C(5; 4; -8)$ ,  $S(7; -7; -8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(0; 5; -2)$  параллельно плоскости  $-6x - y + z = -8$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{-5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 8; 2)$ ,  $B(3; 5; 0)$ ,  $C(6; 13; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-13; 10; -19)$  на плоскость  $10x - 6y + 9z - 73 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+7}{2}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 3y - z = -7$ .

**Вариант 18.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(4; 1; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -1; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; -2; 1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -8\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(4; 3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 6; 9)$ ,  $B(-1; 3; 14)$ ,  $C(1; 8; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(6; -2; 8)$ ,  $B(1; -4; -1)$ ,  $D(3; -3; 3)$ ,  $A_1(9; -2; 12)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-9; 5; 3)$ ,  $B(-7; 12; 2)$ ,  $C(-10; 6; 4)$ ,  $S(8; -5; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(5; 3; -10)$  перпендикулярно плоскостям  $-3x + 2y + z = 2$  и  $-4x + y + z = 5$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 7; 2)$ ,  $B(0; 6; 1)$ ,  $C(5; 8; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z + 14 = 0 \\ x + 3y + z - 12 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(19; -2; 21)$  на плоскость  $4x - 3y + 4z - 2 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{2}$  и плоскостью  $\pi : x - 4y + 3z - 10 = 0$ .

**Вариант 19.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -5; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(2; 3; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; -5; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-2; 3; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-7; -2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 3; 9)$ ,  $B(8; 2; 8)$ ,  $C(6; 5; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_4$ .  $A_1(0; 2; -6)$ ,  $A_2(6; -1; -14)$ ,  $A_3(3; -1; -11)$ ,  $A_4(2; 3; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(0; -2; 1)$ ,  $B(3; -5; 0)$ ,  $C(-2; -1; 2)$ , и найти расстояние от точки  $S(6; 1; -6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; 1; -4)$  перпендикулярно плоскостям  $3x + y - 2z = -6$  и  $-x + y - z = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 9; 3)$ ,  $B(-2; 11; 6)$ ,  $C(1; 10; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - 9y + z - 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(3; -3; 2)$  относительно плоскости  $-3x + z - 8 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{2} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{1}$  и плоскостью  $\pi : x + 4y + 2z = -2$ .

**Вариант 20.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 D_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-6; 5; 2)$ ,  $\mathbf{c}(1; 2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; 1; 4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 7\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(7; -5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 5; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 3; 6)$ ,  $B(4; 1; 9)$ ,  $C(2; 2; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(8; -6; -8)$ ,  $A_2(9; -9; -8)$ ,  $A_4(4; 0; -13)$ ,  $B_1(12; -16; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-2; -9; 0)$ ,  $B(-1; -8; 1)$ ,  $C(-4; -10; 0)$ , и найти расстояние от точки  $S(8; -8; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; -2; -4)$  параллельно прямым  $\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-3}$  и  $\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 9; 0)$ ,  $B(-2; 4; -3)$ ,  $C(1; 11; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - y + z - 24 = 0 \\ -x + 3y + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(0; 0; 3)$  относительно плоскости  $x + y - 1 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-4}{2}$  и плоскостью  $\pi : -x - 2y - z = -5$ .

**Вариант 21.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 4; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 6; 4)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; -3; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -5\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-2; -3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -1; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 4; 3)$ ,  $B(4; -1; 2)$ ,  $C(2; 13; 5)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $BCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A$ .  $A(8; 6; -8)$ ,  $B(9; 0; -7)$ ,  $C(10; -7; -5)$ ,  $D(13; -7; -2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; 1; 1)$ ,  $B(-6; 0; 3)$ ,  $C(-11; 2; -2)$ , и найти расстояние от точки  $S(-2; 6; -6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(2; -8; -9)$  параллельно прямой  $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $x + 2y = 5$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 4; 5)$ ,  $B(0; 1; 3)$ ,  $C(0; 0; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - 3y + 7 = 0 \\ -2x - y - z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-15; 9; -21)$  относительно плоскости  $5x - 3y + 8z + 25 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+6}{1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + 6y - 2z = -7$ .

**Вариант 22.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-4; -1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 2; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(6; -4; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 9\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; -7; 1)$ ,  $\mathbf{b}(7; -2; 6)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 8; 2)$ ,  $B(1; 12; 3)$ ,  $C(4; 11; 3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(4; -5; 0)$ ,  $B(8; -6; -6)$ ,  $D(6; -8; -5)$ ,  $E(7; -9; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; 6; 5)$ ,  $B(-6; 15; 4)$ ,  $C(-11; 2; 6)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; 0; -1)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(9; 6; -7)$  параллельно прямой  $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$  и перпендикулярно плоскости  $2x - y + z - 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 9; 0)$ ,  $B(5; 13; -2)$ ,  $C(4; 14; -3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y - 9z - 18 = 0 \\ -4x - y + 10z + 23 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(38; -11; -12)$  на плоскость  $-10x + 2y + 5z = -75$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y-8}{4} = \frac{z+7}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x + 2y + 2z = -6$ .

**Вариант 23.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; -5; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 2; -5)$ ,  $\mathbf{c}(3; 5; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -2; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-2; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(3; 5; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 5; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 4; 7)$ ,  $B(2; 2; 3)$ ,  $C(1; -1; -2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(4; -4; -8)$ ,  $B(-3; -6; 1)$ ,  $D(2; -5; -3)$ ,  $E(1; -6; 1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(2; -1; 7)$ ,  $B(9; 0; 5)$ ,  $C(10; 0; 6)$ ,  $S(3; 5; -6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; 0; -7)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - 3y - 3z = 0$  и  $-3x + 2y + 5z = -5$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 4; 1)$ ,  $B(4; 6; 4)$ ,  $C(5; 9; 8)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 6x + 3y - z - 23 = 0 \\ -5x - 2y + z + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-4; -5; 2)$  относительно плоскости  $8x + y + 3z = 6$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{1}$  и плоскостью  $\pi : -4x - 6y + z = 3$ .



**Вариант 24.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -3; 5)$ ,  $\mathbf{c}(2; 2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; -5; -7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -6\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(3; 2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-4; -1; 12)$ ,  $\mathbf{c}(5; 1; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 4; 7)$ ,  $B(0; 5; 7)$ ,  $C(-4; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(5; -3; 3)$ ,  $D(-3; 4; -1)$ ,  $E(-7; 10; 0)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-2; -1; 10)$ ,  $B(2; -2; 10)$ ,  $C(-11; 1; 9)$ ,  $S(-5; 1; 4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; -7; -2)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - y + 5z = 1$  и  $-x + y - 3z - 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 3; 5)$ ,  $B(13; 5; -4)$ ,  $C(10; 4; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-4; 3; 3)$  относительно плоскости  $-3x + 3y - 2z - 4 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-5}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -3x - y - 2z = -12$ .

**Вариант 25.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; -5; -2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -2; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(6; 7; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 8\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 5\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-10; 0; 11)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 3; 4)$ ,  $B(5; 11; 4)$ ,  $C(3; 0; 5)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(5; -5; -2)$ ,  $B(2; -4; -8)$ ,  $D(3; -3; -5)$ ,  $A_1(6; -7; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; 9; 0)$ ,  $B(8; 10; 2)$ ,  $C(5; 8; -5)$ ,  $S(6; -8; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 3; 5)$  параллельно прямым  $\frac{x+5}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{-1}$  и  $\frac{x-3}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+2}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 8; 3)$ ,  $B(11; 1; 7)$ ,  $C(9; 6; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z + 1 = 0 \\ -2x + 7y + 3z - 25 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-10; -6; 5)$  на плоскость  $-2x + y - 2z = -14$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{2}$  и плоскостью  $\pi : -4x - y - z + 1 = 0$ .

**Вариант 26.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; 5; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -6; 0)$ ,  $\mathbf{c}(4; -5; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(7; 1; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -5; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 1; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 9; 9)$ ,  $B(5; 10; 9)$ ,  $C(2; 10; 10)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(8; -8; 1)$ ,  $B(9; -5; -3)$ ,  $D(7; -9; -3)$ ,  $A_1(6; -13; 4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-10; 1; -4)$ ,  $B(-9; -2; -5)$ ,  $C(-11; 9; -2)$ , и найти расстояние от точки  $S(-8; -2; -7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(1; -8; -3)$  параллельно прямым  $\frac{x+6}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$  и  $\frac{x+1}{4} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z}{-2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 4; 8)$ ,  $B(14; 5; 4)$ ,  $C(3; 3; 13)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z + 25 = 0 \\ x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(15; 15; 12)$  на плоскость  $3x + 2y + z = 45$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -x - 3y - z = -10$ .

**Вариант 27.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $AB$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; 3; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-5; -3; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -4; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 0; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 6\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(2; 5; 4)$ ,  $\mathbf{b}(3; -1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-6; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 4; 6)$ ,  $B(13; 9; 8)$ ,  $C(15; 10; 9)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(8; -8; 3)$ ,  $A_2(5; -15; -1)$ ,  $A_3(4; 1; -2)$ ,  $A_4(9; -6; 4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; 4; 0)$ ,  $B(12; -6; 4)$ ,  $C(8; 3; 1)$ ,  $S(-7; 5; -1)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-3; -8; 5)$  параллельно плоскости  $2x + y + 5z + 1 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 8; 3)$ ,  $B(4; 11; 1)$ ,  $C(7; 9; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  

$$\begin{cases} -2x - y - z - 12 = 0 \\ 3x + 2y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(9; -13; 13)$  относительно плоскости  $-5x + 6y - 9z + 27 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y - 2z - 9 = 0$ .

**Вариант 28.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; -6; -1)$ ,  $\mathbf{b}(1; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-6; 3; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; -4; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 9\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_y \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-11; -1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(5; -5; -3)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 4; 1)$ ,  $B(-2; 6; 2)$ ,  $C(-3; 5; 2)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQR$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $S$ .  $P(-7; -3; 1)$ ,  $Q(-7; -7; -8)$ ,  $R(-6; 1; 9)$ ,  $S(-5; -2; 2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(10; -4; -2)$ ,  $B(11; -1; -2)$ ,  $C(9; -9; -1)$ ,  $S(8; -8; -5)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(8; -1; -10)$  параллельно плоскости  $x + 5y - 2z = -5$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 7; 6)$ ,  $B(0; 10; 7)$ ,  $C(-1; 12; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
 
$$\begin{cases} x - 8y - 21 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-17; 37; -7)$  на плоскость  $-6x + 7y - 2z - 19 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{4} = \frac{y+8}{3} = \frac{z+8}{3}$  и плоскостью  $\pi : -x + y - z = 1$ .

**Вариант 29.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(0; 5; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 5; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-7; 7; 4)$ ,  $\mathbf{b}(1; -1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; -3; -5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 5; 9)$ ,  $B(5; 10; 7)$ ,  $C(5; 7; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-6; -4; 8)$ ,  $A_2(-3; -7; 4)$ ,  $A_4(-7; 4; 5)$ ,  $B_1(-7; -7; 12)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; -9; 2)$ ,  $B(-6; -11; 3)$ ,  $C(-4; -10; 4)$ ,  $S(-1; 4; 4)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-1; 0; 0)$  параллельно плоскости  $x + 8y = 2$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 2; 2)$ ,  $B(-1; 5; 12)$ ,  $C(4; 1; -1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + 2y - z + 16 = 0 \\ x + y + 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-12; -11; -4)$  относительно плоскости  $5x + 5y + 2z = 12$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-7} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+1}{1}$  и плоскостью  $\pi : x - y - z = -11$ .

**Вариант 30.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -5; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -5; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; -5; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-3; -8; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 3)$ ,  $\mathbf{c}(2; 2; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 8; 4)$ ,  $B(8; 7; 5)$ ,  $C(7; 7; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-5; -7; 5)$ ,  $B(-15; 2; 10)$ ,  $C(0; -9; 2)$ ,  $D(-3; -10; 4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; -4; -1)$ ,  $B(8; -8; -2)$ ,  $C(8; 1; -1)$ ,  $S(-8; 5; 1)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-3; -3; 0)$  параллельно прямым  $\frac{x+3}{7} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$  и  $\frac{x-6}{6} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+6}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 2; 5)$ ,  $B(4; -1; 4)$ ,  $C(0; 12; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -3x + 7y - 2z + 26 = 0 \\ 2x - 4y + z - 15 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-21; 20; 0)$  относительно плоскости  $8x - 9y - z = 17$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 3y - z + 1 = 0$ .

**Вариант 31.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 3; 1)$ ,  $\mathbf{b}(2; 5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -2; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 6; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; 2; -2)$ ,  $\mathbf{b}(4; 5; -14)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -3; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 7; 7)$ ,  $B(-7; 9; 8)$ ,  $C(8; 6; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(7; -7; 9)$ ,  $B(6; -9; 5)$ ,  $D(5; -6; 2)$ ,  $E(8; -8; 12)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-2; 0; -2)$ ,  $B(-1; 3; -1)$ ,  $C(-1; 8; 0)$ , и найти расстояние от точки  $S(-6; 8; -6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 5; -1)$  параллельно прямым  $\frac{x+8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{0}$  и  $\frac{x-2}{9} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-6}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 4; 6)$ ,  $B(1; 2; 7)$ ,  $C(2; 1; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 4 = 0 \\ x + 4y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(25; -5; 1)$  на плоскость  $10x + y + 3z + 82 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -8x + y + z = 6$ .



**Вариант 32.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; -2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(6; -1; 4)$ ,  $\mathbf{c}(3; 2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; -1; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -3; 2)$ ,  $\mathbf{b}(1; 0; -6)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 8; 9)$ ,  $B(9; 1; 10)$ ,  $C(7; 10; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-9; -5; 6)$ ,  $B(-13; 0; 15)$ ,  $D(-14; 1; 16)$ ,  $A_1(-10; -3; 8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(0; 6; 8)$ ,  $B(2; 4; 9)$ ,  $C(7; 3; 9)$ , и найти расстояние от точки  $S(8; -5; -8)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(7; 3; -9)$  параллельно прямой  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $-x + 8y = -2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 4; 2)$ ,  $B(3; 1; 7)$ ,  $C(1; 8; -5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + y + z + 11 = 0 \\ -2x + y + 6z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-17; -22; -10)$  на плоскость  $9x + 8y + 4z = 114$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 3y - z - 13 = 0$ .

**Вариант 33.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(5; 5; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -4; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-8; -7; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 8\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-4; -1; -4)$ ,  $\mathbf{b}(4; -1; 3)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 5; 0)$ ,  $B(11; 1; 1)$ ,  $C(6; 12; -1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ACD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B$ .  $A(-6; 1; 2)$ ,  $B(-4; -1; 9)$ ,  $C(-3; 2; 6)$ ,  $D(-4; -2; 11)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3; 3; 0)$ ,  $B(4; 5; -3)$ ,  $C(-1; 4; -1)$ , и найти расстояние от точки  $S(-4; -8; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; 2; 5)$  параллельно прямой  $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $-x - 9y = -4$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 9; 4)$ ,  $B(-1; 7; 3)$ ,  $C(4; 16; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -5x + 2y - z + 29 = 0 \\ 3x - 3y + 2z - 18 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-18; 25; -28)$  на плоскость  $-2x + 6y - 5z = 66$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-7}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 5y + z + 13 = 0$ .

**Вариант 34.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 1; 0)$ ,  $\mathbf{b}(5; -3; 4)$ ,  $\mathbf{c}(2; 0; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -6; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-13; 4; 8)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(7; -2; -4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 6; 7)$ ,  $B(6; 9; 6)$ ,  $C(2; 4; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $R$ .  $P(-3; -2; 7)$ ,  $Q(-5; 0; 2)$ ,  $R(-5; 1; 4)$ ,  $S(-2; -4; 9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(3; 7; 5)$ ,  $B(4; 8; 2)$ ,  $C(1; 6; 9)$ , и найти расстояние от точки  $S(5; 3; 5)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-8; -7; 2)$  параллельно плоскости  $-x + 3y - 2z = 3$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+6}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 8; 6)$ ,  $B(6; 6; 3)$ ,  $C(-1; 9; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - 5y + 7 = 0 \\ -x + y + z - 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(1; 2; 4)$  относительно плоскости  $2x + y - z = -3$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{4} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z}{1}$  и плоскостью  $\pi : 3x - y - z - 10 = 0$ .

**Вариант 35.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; 5; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 1; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 0; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; -5; 9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-3; 1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(3; -4; -4)$ ,  $\mathbf{c}(6; -3; -10)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 9; 9)$ ,  $B(6; 10; 10)$ ,  $C(6; 11; 14)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-8; 0; 1)$ ,  $A_2(-6; -3; -1)$ ,  $A_4(-11; 8; 6)$ ,  $B_1(-10; 7; 6)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; -3; 8)$ ,  $B(-2; -1; 8)$ ,  $C(-2; -10; 9)$ ,  $S(3; 5; 0)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-6; 1; -8)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - 2y - z - 6 = 0$  и  $3x - 5y - z - 8 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 7; 6)$ ,  $B(6; 6; 3)$ ,  $C(3; 8; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y + 9 = 0 \\ 2x + 4y + z + 24 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(28; 16; 19)$  на плоскость  $7x + 8y + 9z = -87$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-6}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y + 5z = 7$ .

**Вариант 36.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 3; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; 0; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(23; 20; 8)$ ,  $\mathbf{b}(-7; -5; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-7; -6; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 5; 5)$ ,  $B(4; 2; 7)$ ,  $C(12; 6; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-9; -7; -8)$ ,  $B(-7; -8; 0)$ ,  $D(-10; -2; -9)$ ,  $A_1(-10; -6; -11)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-1; 2; 2)$ ,  $B(7; 3; 1)$ ,  $C(8; 3; 2)$ ,  $S(0; -4; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-1; -2; -4)$  параллельно плоскости  $-x - 5y + 2z - 3 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+8}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 5; 9)$ ,  $B(10; 6; 17)$ ,  $C(-5; 4; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x - 2y - z + 5 = 0 \\ x - 3y + 12 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-2; 0; 2)$  относительно плоскости  $4x + 7y + z = -39$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+7}{-3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{-3}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y - z = -7$ .

**Вариант 37.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $D_1 C_1$  в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -2; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -2; 1)$ ,  $\mathbf{c}(4; 3; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; -1; -10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; -6; -4)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 14; 7)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 7; 6)$ ,  $B(1; 8; 10)$ ,  $C(1; 9; 11)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-6; -8; -7)$ ,  $A_2(-15; -15; -5)$ ,  $A_4(1; -5; -10)$ ,  $B_1(-5; -10; -9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-10; -7; 1)$ ,  $B(-8; -10; 2)$ ,  $C(-13; -2; -2)$ , и найти расстояние от точки  $S(2; 6; 6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 1; 4)$  параллельно прямой  $\frac{x+8}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $x + 9y + 2z = 8$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 7; 3)$ ,  $B(1; 11; -4)$ ,  $C(3; 8; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -9x + y + z - 6 = 0 \\ 4x - y + 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-1; 2; 6)$  относительно плоскости  $-7x + 7y + 6z + 10 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{1}$  и плоскостью  $\pi : 5x + 3y + z = -12$ .

**Вариант 38.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 5; -5)$ ,  $\mathbf{b}(2; 3; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -1; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -7; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(1; -2; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 1; -7)$ ,  $\mathbf{c}(1; -2; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 9; 4)$ ,  $B(6; 7; 3)$ ,  $C(5; 6; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(6; 7; -1)$ ,  $A_2(2; 0; -4)$ ,  $A_4(3; 2; -5)$ ,  $B_1(4; 4; 0)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(6; -6; -4)$ ,  $B(7; -4; -6)$ ,  $C(8; -1; -7)$ , и найти расстояние от точки  $S(-1; -8; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(2; -6; 4)$  параллельно прямым  $\frac{x-6}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-1}$  и  $\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 2; 0)$ ,  $B(1; 4; 3)$ ,  $C(0; 5; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -4x - y - 3z - 15 = 0 \\ x + y + 2z + 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-2; -2; 3)$  относительно плоскости  $-5x - 2y + z - 2 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{-1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 5y - 6z - 6 = 0$ .

**Вариант 39.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 0; -2)$ ,  $\mathbf{c}(5; -5; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; -1; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-3; -3; 2)$ ,  $\mathbf{b}(9; 4; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -3; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 6; 8)$ ,  $B(7; 7; 11)$ ,  $C(9; 4; 12)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_4$ .  $A_1(-9; 0; -4)$ ,  $A_2(-6; 8; -11)$ ,  $A_3(-6; 8; 4)$ ,  $A_4(-8; 3; 0)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(7; -9; 9)$ ,  $B(5; -10; 8)$ ,  $C(10; -8; 9)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; 3; 2)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-10; -3; -9)$  параллельно прямой  $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-2}$  и перпендикулярно плоскости  $2x - y - 5z + 4 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 3; 5)$ ,  $B(8; 1; 9)$ ,  $C(7; 2; 8)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ -x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-22; 27; -5)$  на плоскость  $3x - 8y + 3z = 31$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -x - 4y - z = 13$ .